

## 17. DETERMINANTES

Cada matriz cuadrada tiene asociado un número llamado determinante. El sentido original del determinante era determinar la unicidad de la solución de un sistema de ecuaciones lineales, pero tiene aplicaciones en muchos otros campos como son el cálculo de áreas y volúmenes, el cálculo vectorial (con el Jacobiano, el Wronskiano), etc. Se exponen aquí los resultados más básicos para el cálculo de determinantes. Un estudio más detallado se puede encontrar en la bibliografía recomendada.

### 17.1. REGLA DE LAPLACE PARA EL CÁLCULO DE DETERMINANTES

1. Los determinantes de las matrices de dimensión  $n \times n$  con  $n = 1, 2, 3$ , se calculan directamente:

$$\begin{aligned} \det(a_{11}) &= a_{11} & \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \\ \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ &\quad - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{aligned}$$

2. Si  $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$  con  $n > 3$ , se aplica la siguiente regla recursiva que reduce el cálculo del determinante de la matriz de dimensión  $n \times n$ , a la suma de  $n$  determinantes de matrices de dimensión  $(n-1) \times (n-1)$ :

Sea  $A_{ij} \in \mathcal{M}_{(n-1) \times (n-1)}$  la matriz de dimensión  $(n-1) \times (n-1)$  que queda al eliminar en  $A$  la fila  $i$  y la columna  $j$  y  $a_{ij}$  la componente de  $A$  situada en la fila  $i$  y columna  $j$ , se tiene entonces que para cualquier columna  $j_0$ , y para cualquier fila  $i_0$  de  $A$ :

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j_0} a_{ij_0} \det(A_{ij_0}) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i_0+j} a_{i_0j} \det(A_{i_0j})$$

Esta regla se conoce como desarrollos del determinante por fila o por columna.

#### EJEMPLO 1

Calcular el determinante de:  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$  y  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

**Solución:** Los dos primeros se calculan directamente y el tercero mediante la fórmula recursiva desarrollando por la tercera fila que tiene dos ceros:

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = 2 \cdot 4 - 3 \cdot (-1) = 11$$

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} &= 1 \cdot 1 \cdot (-2) + 2 \cdot 3 \cdot (-1) + 0 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot (-1) - 1 \cdot 3 \cdot 1 - 0 \cdot 2 \cdot (-2) \\ &= \\ &= -2 - 6 + 1 - 3 = -10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} &= 2 \cdot (-1)^4 A_{31} + 0 \cdot (-1)^5 A_{32} + 3 \cdot (-1)^6 A_{33} + 0 \cdot (-1)^7 A_{34} = \\ &= 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} + 3 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot (-9) + 3 \cdot 6 = 0 \end{aligned}$$

## 17.2. PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES

Como se ha visto en el ejemplo 1, el cálculo de determinantes es más sencillo cuantos más ceros tenga la matriz. Las operaciones elementales ayudan a hacer ceros, pero hay que tener en cuenta sus propiedades:

1. Si  $B$  se obtiene intercambiando dos filas (o columnas) de  $A$ :  $\det(B) = -\det(A)$
2. Si  $B$  se obtiene multiplicando una fila (o columna) de  $A$  por el escalar  $r$ :  $\det(B) = r \det(A)$
3. Si  $B$  se obtiene sumando a una fila (o columna) de  $A$  un múltiplo de otra fila (o columna), entonces:  $\det(B) = \det(A)$
4. Otras propiedades de los determinantes son:  
 $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow \text{rang}(A) = n$        $\det(A) = \det(A^t)$        $\det(AB) = \det(A) \det(B)$

### EJEMPLO 2

Calcular los valores de  $x$  que anulan el determinante de  $A = \begin{pmatrix} 1-x & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1-x & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1-x \end{pmatrix}$

**Solución:**

Para simplificar el cálculo del determinante de  $A$ , antes de desarrollar por una fila o columna, usamos las propiedades dadas: El determinante de  $A$  coincide con el determinante de la matriz  $A_1$  obtenida al sumar a la primera fila, el resto de las filas; y el determinante de  $A_1$  coincide con el determinante de  $A_2$  obtenida al sumar la primera columna multiplicada por  $-1$  a las columnas segunda, tercera y cuarta:

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} 2-x & 2-x & 2-x & 2-x \\ 1 & 1-x & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1-x & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1-x \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 2-x & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -x & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 2-x & 2 \\ 1 & -2 & 0 & -x \end{pmatrix} = \det(A_2)$$

Desarrollamos ahora el determinante de  $A_2$  por la primera fila:

$$\det(A_2) = (2-x) \det \begin{pmatrix} -x & 0 & -2 \\ 2 & 2-x & 2 \\ -2 & 0 & -x \end{pmatrix} = (2-x)(2-x)(x^2-4) = -(2-x)^3(2+x)$$

Luego  $\det(A)$  se anula si y sólo si  $x = 2$  (raíz triple del polinomio) ó  $x = -2$ .